黒木玄 **Gen Kuroki**
@genkuroki

iPhoneからテスト。

だらだらと長めに入力してみる。

ところで、何人かがガンマ函数の無限積表示関係の話をしていますが、ガンマ函数の無限積表示は結構萌えますよね。

$$\begin{aligned}\Gamma(s) &= \int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}\,dx \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{n^s n!}{s(s+1)\cdots(s+n)} \\ &= \frac{1}{e^{\gamma s}s}\prod_{n=1}^\infty\left[\left(1+\frac{s}{n}\right)e^{-s/n}\right]^{-1}\end{aligned}$$

おお！素晴らしい！

上の数式を全部iPhoneから入力してみたのですが、ちょっと重いなという感じですが、無事入力できました。

iPhone5c Chrome より

2017年05月04日 14:52 · Web · 1 · 1 · Webで開く

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki on May 4

ガンマ函数のduplication formulaには積分の変数変換以外を使用しない「初等的」な証明があります。次の積分を二通りに変形すればよい。

$$I(s) = \int_{-1}^1 (1-z^2)^{s-1}\,dz.$$

(1) 被積分函数が偶函数であることを使って、$z=\sqrt{t}$ とおくと

$$\begin{aligned}I(s) &= \int_0^1 t^{-1/2}(1-t)^{s-1}\,dt \\ &= B(\tfrac{1}{2},\tfrac{n-1}{2}) \\ &= \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(s)}{\Gamma(s+\frac{1}{2})}\end{aligned}$$

(2) $(1-z^2)=(1+z)(1-z)$ と因数分解し、$z=2x-1$ とおくと

$$
\begin{aligned}
I(s) &= 2^{2s-1}\int_0^1 x^{s-1}(1-x)^{s-1}\,dx \\
&= 2^{2s-1}B(s,s) \\
&= \frac{2^{2s-1}\Gamma(s)^2}{\Gamma(2s)}
\end{aligned}
$$

続く

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki on May 4

都築

(1),(2)を比較して $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$ を使うと、dupilication formula

$$
\Gamma(2s)=\frac{2^{2s-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(s)\Gamma(s+\tfrac{1}{2})
$$

が得られます。

問題：2 から n への一般化(Gaussの乗法公式)にも積分変数の変換のみを用いた「初等的」な証明があるか？

多分知られていると思うのですが、まじめに調べていないので、これを書いている時点で私も答えを知りません。

知っている人がいたら教えて下さい。ググれば見つかるかも。

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki on May 4

リンクメモ

math.stackexchange.com/questio...
ガンマ函数に関するガウスの乗法公式の証明について

できるだけ「形式的な式変形」に近いセンスで証明したいなら、上から２つ目の証明がいいかな？

---

pokopon @pokopon on May 4

@genkuroki
George E. Andrews, Richard Askey, Ranjan Roy [2001]. Special Functions, Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, 71, Cambridege University Press (ISBN: 0521789885) の p.24 に
”An elegant proof of the multiplication formula using the integral definition of the gamma function is due to Liouville [1855].”
と書かれてあり、その1855年のLiouvilleの原論文が、幸いインターネットで公開されていました。いかがでございますでしょうか。
sites.mathdoc.fr/JMPA/PDF/JMPA... mathtod.online/media/1OFfo3qia...

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki on May 4

@pokopon おお！さんきゅ！見てみます。

mathtod.online powered by Mastodon